Tehnička mehanika 2 - drugi deo ispita

(Prvi deo: 14. oktobar 2006.)

ZADATAK 1 (...30%)

Materijalna tačka mase m vezana je sa tri opruge: dve opruge, krutosti k_1 i k_2, vezane su međusobno paralelno, a zajedno su, posredstvom krute poluge zanemarljive mase, redno vezane sa oprugom krutosti k_3, slika 1.

(a) (...15%) Za posmatrane tri opruge odrediti krutost jedne ekvivalentne opruge k_{eq}.

(b) (...10%) Ako su opruge k_1 i k_2 poznatih krutosti: $k_1 = 3k$ i $k_2 = 2k$, odrediti krutost k_3 treće, redno vezane opruge, tako da je krutost ekvivalentne opruge jednaka $k_{eq} = 4k$.

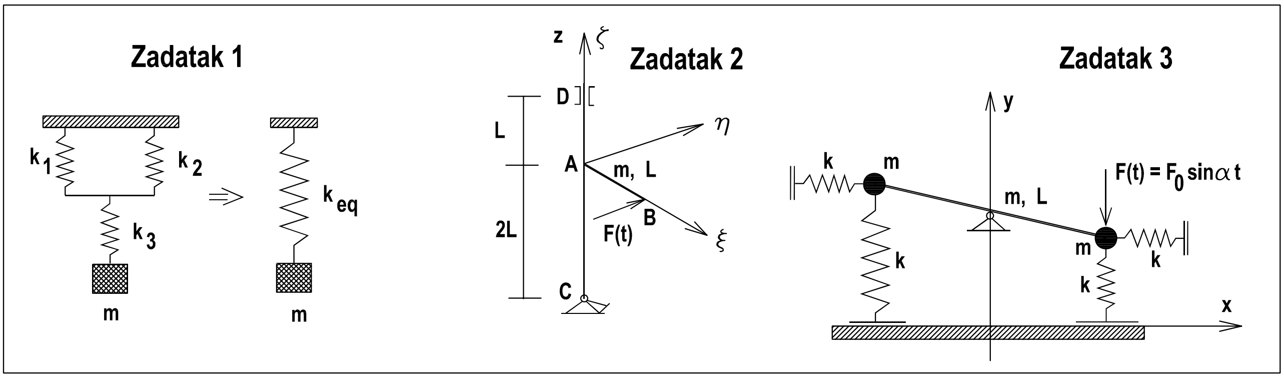
(c) (...5%) Ako je poznato da je $m = 40$ kg, kao i da je $k = 100$ kN/m, odrediti kružnu frekvenciju i frekvenciju (u hercima) slobodnih oscilacija posmatrane tačke, za uslove date pod (b).

ZADATAK 2 (...30%)

Štap AB, mase m i dužine L, kruto je vezan pod pravim uglom za vertikalnu osovinu CD oko koje se obrće pod uticajem horizontalne sile koja je stalno upravna na štap: $\vec{F}(t) = F_\eta(t) \cdot \vec{\mu}$, slika 2. Napisati potpun sistem diferencijalnih jednačina kretanja iz kojeg mogu da se odrede zakon obrtanja štapa, kao i reakcije veza u osloncima osovine C i D.

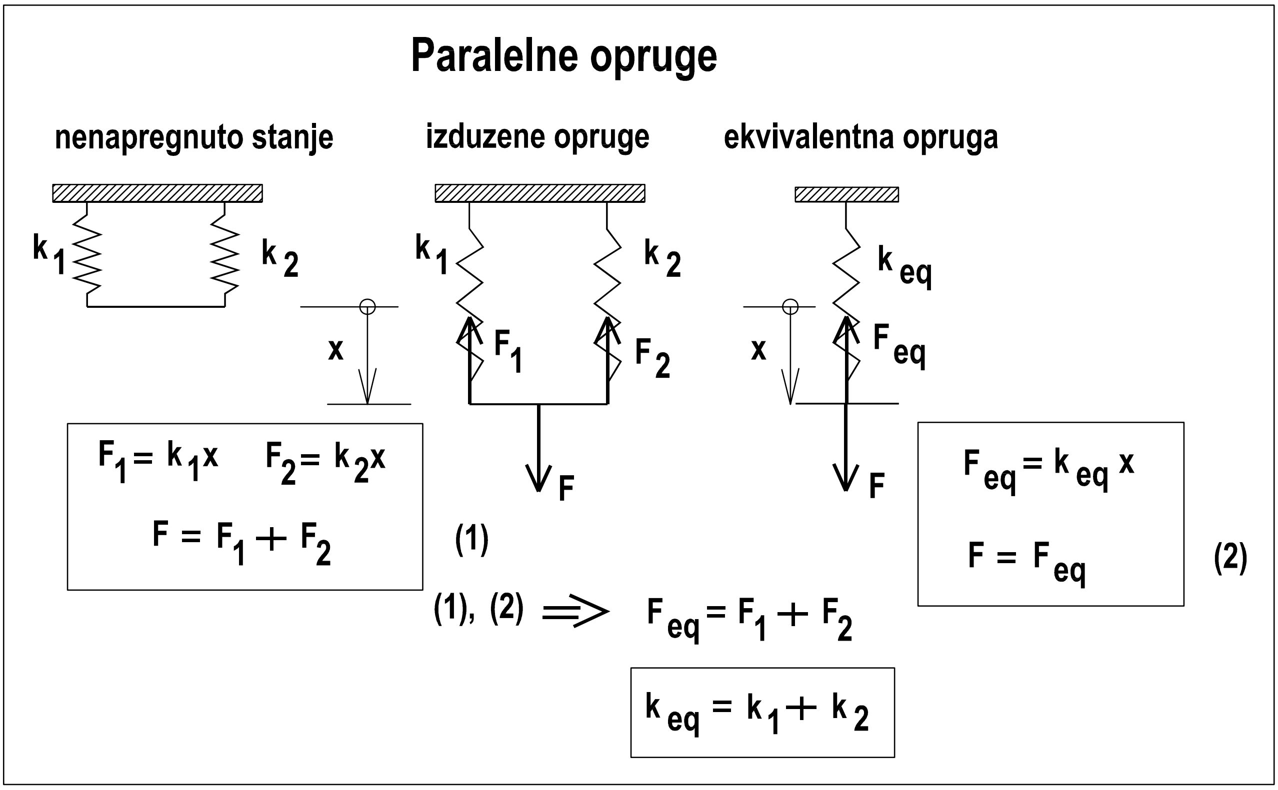
ZADATAK 3 (...40%) Štap mase m i dužine L se nalazi u vertikalnoj ravni x, y (osa x je horizontala) i vezan je kao što je dato na slici 3: u sredini nepokretnim osloncem, a na krajevima sa po dve opruge, u horizontalnom i vertikalnom pravcu. Sve opruge su istih krutosti k i sve su nenapregnute kada je štap u horizontalnom položaju. Na oba kraja štapa se nalazi i po jedna koncentrisana masa m. Na desnom kraju štapa deluje vertikalna sila $F(t) = F_0 \cdot \sin \alpha t$.

Odrediti zakon kretanja štapa, pri malim oscilacijama, usled dejstva date prinudne sile, uz predpostavku o homogenim početnim uslovima.



ZADATAK 1 (...30%)

(a) Posmatra se prvo sistem od dve paralelno vezane opruge datih krutosti k_1 i k_2. Na slici 1 su prikazane opruge u nenapregnutom stanju, opruge posle (zajedničkog) izduženja za neko x, kao i jedna ekvivalentna opruga, krutosti k_{eq}, koja je takođe izdužena za istu dužinu x u odnosu na nenapregnuto stanje. Izduženje opruga se odvija pod dejstvom neke sile F.

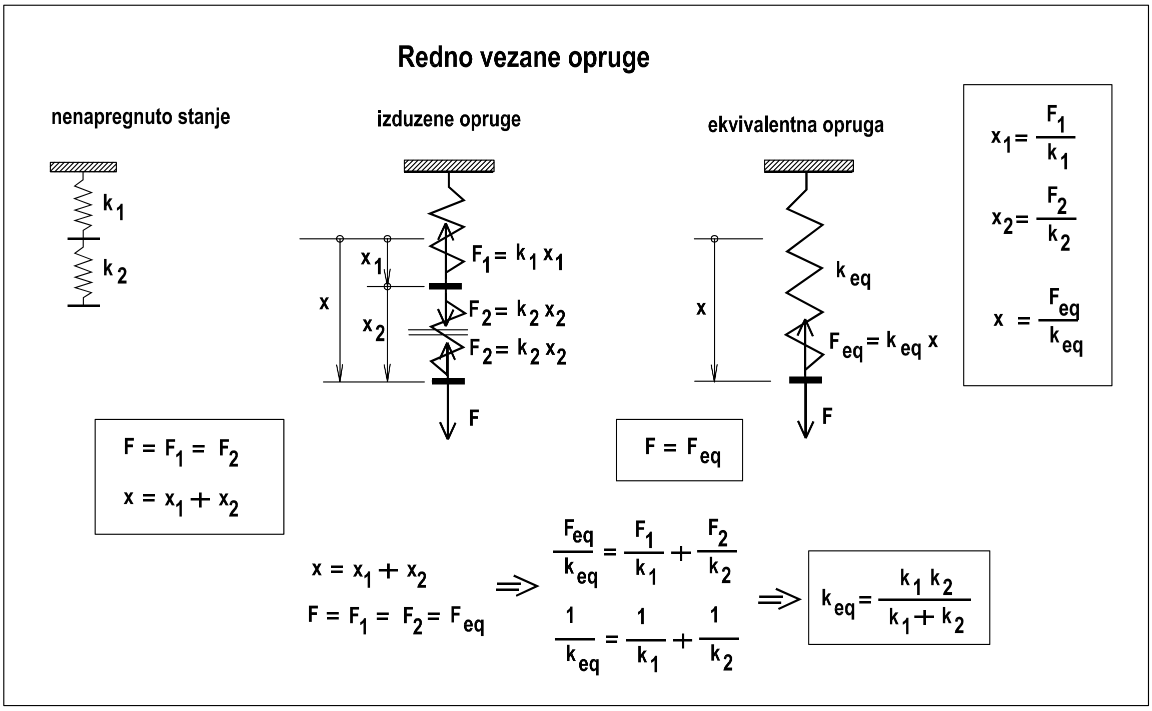


Slika 1: Dve paralelno vezane opruge - ekvivalentna opruga

Za sistem od dve paralelne opruge u deformisanoj konfiguraciji sile u oprugama su date sa $F_1 = k_1 \cdot x$ i $F_2 = k_2 \cdot x$, pri čemu važi i uslov ravnoteže sila $F_1 + F_2 = F$. Sa druge strane, ako se posmatra jedna ekvivalentna opruga, deformisana za istu veličinu x, imamo relaciju: $F_{eq} = k_{eq} \cdot x$, kao i $F_{eq} = F$. Kombinovanjem se direktno dolazi do izraza za ekvivalentnu krutost dve paralelno vezane opruge:

$$F_{eq} = F_1 + F_2 \quad \Rightarrow \quad k_{eq} = k_1 + k_2 \tag{1}$$

Posmatraju se sada dve redno vezane opruge, u nenapregnutom stanju, krutosti k_1 i k_2 (u ovom trenutku se ne posmatra direktno primer u zadatku), slika 2. Ako se opruga krutosti k_1 izduži za neku veličinu x_1, a opruga krutosti k_2 za neku nezavisnu dopunsku veličinu x_2, onda je ukupno izduženje donjeg kraja druge opruge jednako $x = x_1 + x_2$. Pri tome se u oprugama javljaju sile koje su jednake $F_1 = k_1 \cdot x$ i $F_2 = k_2 \cdot x$.



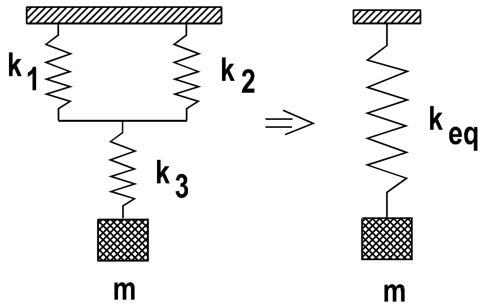
Slika 2: Dve redno vezane opruge - ekvivalentna opruga

Ta deformacija obe opruge se odvija pod dejstvom neke sile F koja deluje na kraju druge opruge. Imajući u vidu uslove ravnoteže sila u te dve redno vezane opruge, očigledno je da važe relacije: $F = F_2$, kao i $F_2 = F_1$. Sa druge strane, ako se posmatra jedna ekvivalentna opruga, krutosti k_{eq}, na koju deluje ista sila F i usled koje se ta opruga izduži za veličinu x, koja je jednaka ukupnom izduženju obe redno vezane opruge, onda važe očigledne relacije: $F_{eq} = k_{eq} \cdot x$, kao i $F_{eq} = F$. Kombinovanjem sa relacijama za dve redno vezane opruge, dobija se:

$$x = x_1 + x_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{F}{k_{eq}} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \tag{2}$$

Rešavanjem poslednjeg izraza 2, dobija se ekvivalentna krutost dve redno vezane opruge u obliku:

$$k_{eq} = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2} \tag{3}$$



Posmatraju se sada tri opruge koje su date zadatkom. Dve opruge su vezane međusobno paralelno, a zajedno su redno vezane sa trećom oprugom, videti sliku levo. Kombinujući izraze (1) i (3), dobija se krutost ekvivalentne opruge za posmatrani slučaj:

$$k_{eq} = \frac{(k_1 + k_2) \cdot k_3}{k_1 + k_2 + k_3} \tag{4}$$

(b) Ako su zadate vrednosti krutosti opruga: $k_1 = 3k$ i $k_2 = 2k$, pri čemu se još zna da je krutost ekvivalentne opruge jednaka $k_{eq} = 4k$, onda je moguće da se iz izraza (4) odredi potrebna krutost redno vezane opruge k_3. Dobija se:

$$4k = \frac{(3k + 2k) \cdot k_3}{3k + 2k + k_3} \qquad \Rightarrow \qquad k_3 = 20k \tag{5}$$

(c) Ako su poznati masa i krutost, onda su svojstvena kružna frekvencija i period dati sa

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad f = \frac{1}{T} \tag{6}$$

U posmatranom slučaju su date numeričke vrednosti: $k = 100$ kN/m, kao i $m = 40$ kg, pa se dobija, vodeći računa o dimenzijama ($k_{eq} = 4k = 400 \times 10^3$ N/m):

$$\omega = \sqrt{\frac{400000}{40}} = 100 \text{ rad/s} \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{2\pi}{100} = 0.0628\ [s] \quad f = \frac{1}{T} = 15.915\ [Hz] \tag{7}$$

ZADATAK 2 (...30%)

Štap AB se obrće oko vertikalne ose (broj stepeni slobode je 1). Kako se traži i diferencijalna jednačina kretanja i reakcije veza u osloncima C i D, napisaće se kompletan sistem jednačina kretanja krutog tela primenom Zakona o kretanju centra mase i Zakona o promeni momenta količine kretanja:

$$m\vec{a}_S = \vec{F}_R \qquad \frac{d\vec{D}^{(A)}}{dt} = \vec{M}_S^{(A)} \tag{8}$$

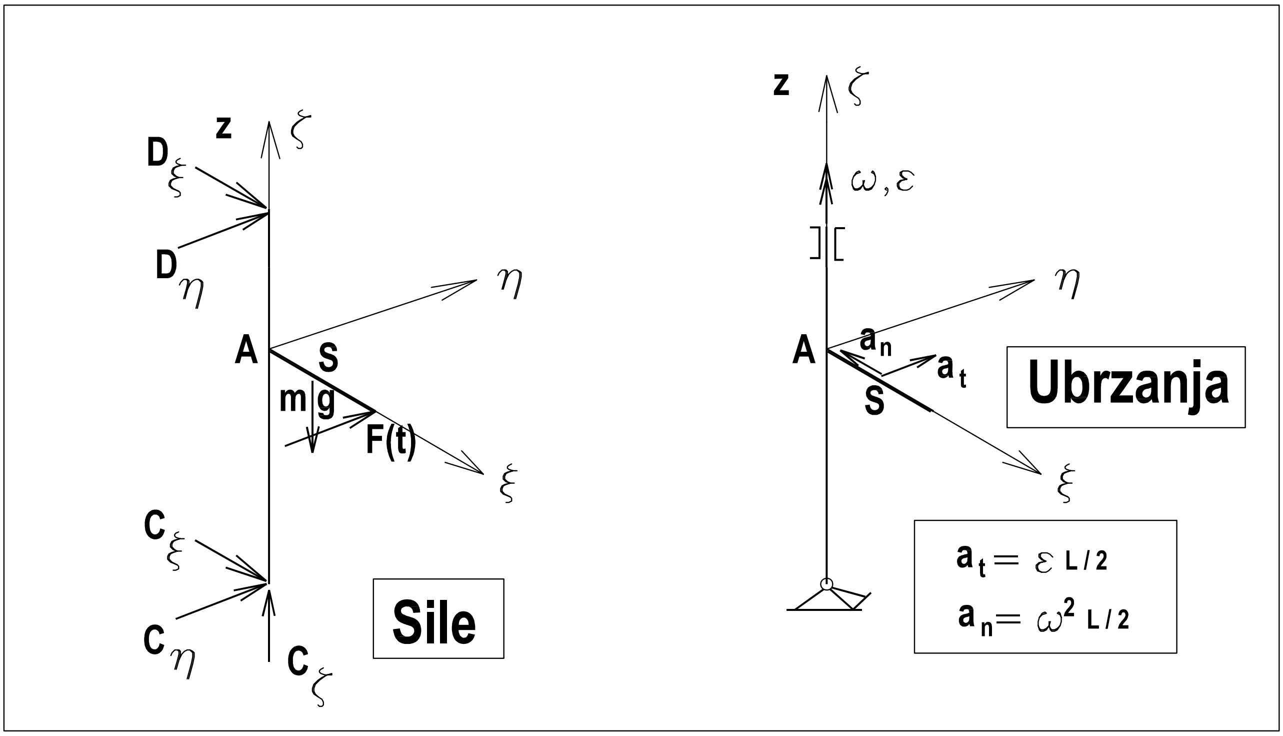
Imajući u vidu kretanje posmatranog štapa, videti sliku 3, ubrzanje centra mase štapa je dato sa:

$$\vec{a}_S = -\dot{\Theta}^2 \frac{L}{2} \cdot \vec{\lambda} + \ddot{\Theta} \frac{L}{2} \cdot \vec{\mu} \tag{9}$$

gde su ugaona brzina i ugaono ubrzanje štapa dati sa

$$\omega = \dot{\Theta} \qquad \epsilon = \ddot{\Theta} \tag{10}$$

pri čemu je $\Theta = \Theta(t)$ ugao obrtanja štapa.



Slika 3: Rotacija štapa oko vertikalne ose: ubrzanja i sile

Momenat količine kretanja u odnosu na materijalni koordinatni sistem je dat kao proizvod matrice inercije štapa i vektora ugaone brzine:

$$\vec{D}^{(A)} = \begin{bmatrix} J_\xi & & \\ & J_\eta & \\ & & J_\zeta \end{bmatrix}^{(A)} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_\zeta \dot{\Theta} \end{bmatrix} \tag{11}$$

pri čemu je momenat inercije štapa za osu ζ u tački A jednak:

$$J_\zeta^{(A)} = \frac{1}{3} m L^2 \tag{12}$$

Izvod po vremenu momenta količine kretanja, koji je dat u sistemu pokretnih koordinata, je dat, u ovom slučaju, samo sa lokalnim izvodom,

$$\frac{d\vec{D}^{(A)}}{dt} = \overset{*}{\vec{D}}{}^{(A)} + \vec{\omega} \times \vec{D}^{(A)} = \overset{*}{\vec{D}}{}^{(A)} \tag{13}$$

jer su vektori ugaone brzine i momenta količine kretanja kolinearni.
Imajući u vidu sve ovo, zakon o promeni količine kretanja, odn. zakon o kretanju centra mase i zakon o promeni momenta količine kretanja mogu da se pišu u skalarnom obliku:

- $m\vec{a}_S = \vec{F}_R \ \Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
-m\frac{L}{2}\dot{\Theta}^2 &= C_\xi + D_\xi && (14)\\
m\frac{L}{2}\ddot{\Theta} &= C_\eta + D_\eta + F(t) && (15)\\
0 &= C_\zeta - mg && (16)
\end{aligned}
$$

- $\frac{d\vec{D}^{(A)}}{dt} = \vec{M}_S^{(A)} \ \Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
0 &= C_\eta 2L - D_\eta L && (17)\\
0 &= -C_\xi 2L + D_\xi L + mg\frac{L}{2} && (18)\\
J_\zeta \ddot{\Theta} &= F(t)L && (19)
\end{aligned}
$$

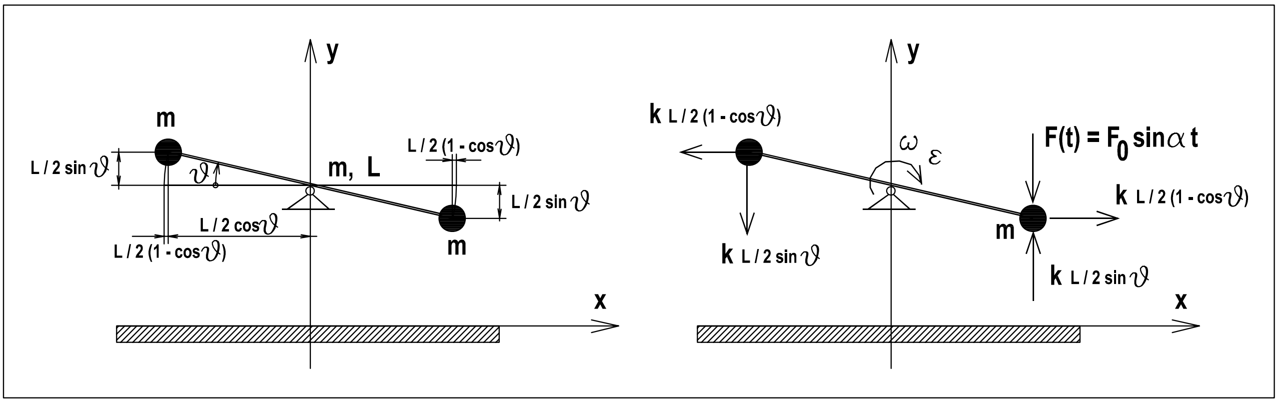
Jednačina (19) predstavlja diferencijalnu jednačinu kretanja štapa:

$$\ddot{\Theta} = \frac{3}{mL} \cdot F(t) \tag{20}$$

dok se iz jednačina (14) do (18) mogu da odrede reakcije veza u materijalnim koordinatama, naravno, uz prethodno rešavanje diferencijalne jednačine (20).

$\boxed{\text{ZADATAK 3 } (\ldots 40\%)}$

Štap ima jedan stepen slobode i generalisana koordinata je ugao ϑ koji se meri od horizontalnog položaja štapa (kada su sve opruge nenapregnute), u smeru kako je prikazano na slici 4. Na istoj slici su prikazana pomeranja opruga (izduženja ili skraćenja) u odnosu na nenapregnuto stanje, u proizvoljnom položaju tokom kretanja štapa. Na slici desno su prikazane sile koje deluju na štap, pri čemu nisu prikazane sile sopstvene težine, kao ni reakcije veze u nepokretnom osloncu, jer te sile, u ovom slučaju, ne utiču na kretanje štapa.



Slika 4: Oscilovanje štapa oko centra mase

Diferencijalna jednačina kretanja se izvodi primenom Zakona o promeni momenta količine kretanja (ili, npr. primenom Lagranževih jednačina):

$$J\varepsilon = M_R^S \tag{21}$$

gde je $\varepsilon = \ddot{\vartheta}$ ugaono ubrzanje štapa, dok je J momenat inercije za centar mase (gde je nepokretan oslonac), dok je M_R^S momenat svih sila u odnosu na centar mase. Momenat inercije za centar mase J, osim momenta inercije samog štapa, uključuje i uticaj dve koncentrisane mase na krajevima:

$$J = \frac{1}{12}mL^2 + 2m(\frac{L}{2})^2 = \frac{7}{12}mL^2 \tag{22}$$

Sve opruge su istih krutosti k i na slici 4 su prikazane sile u oprugama koje odgovaraju štapu u proizvoljnom položaju. Rečeno je da na slici nisu prikazane sile sopstvene težine: rezultujuća težina i štapa i koncentrisanih tačaka na krajevima je, zbog simetrije, na vertikali kroz oslonac, tako da je momenat sopstvene težine jednak nuli (ne utiče na kretanje).
Momenti prikazanih sila u odnosu na oslonac (odn. središte štapa), pri čemu je pozitivan momenta u smeru pozitivnog smera obrtanja (ugaone brzine, ubrzanja) štapa, dati su sa:

$$M_R^S = -k\frac{L}{2}\cdot\sin\vartheta\cdot 2\cdot\frac{L}{2}\cos\vartheta - k\frac{L}{2}\cdot(1-\cos\vartheta)\cdot 2\cdot\frac{L}{2}\sin\vartheta + F_0\sin\alpha t\cdot\frac{L}{2}\cos\vartheta \tag{23}$$

Vidi se da sile u oprugama formiraju spregove: u vertikalnim oprugama pozitivnog, a u horizontalnim oprugama negativnog znaka. Ako se posmatra slučaj malih oscilacija, onda je $\vartheta \approx 0$, pa je $\sin\vartheta \approx \vartheta$, kao i $\cos\vartheta \approx 0$. Unoseći to u izraz (23), momenat horizontalnih opruga postaje nula (te sile ne utiču na kretanje u slučaju malih oscilacija), dok ostali članovi postaju:

$$M_R^S = -\frac{1}{2}kL^2\vartheta + \frac{L}{2}F_0\sin\alpha t \tag{24}$$

Unoseći 24), kao i (22) u jednačinu (21), dobija se

$$\frac{7}{12}mL^2\cdot\ddot{\vartheta} = -\frac{1}{2}kL^2\vartheta + \frac{L}{2}F_0\sin\alpha t \tag{25}$$

odnosno, posle sređivanja:

$$\ddot{\vartheta} + \frac{6}{7}\frac{k}{m}\cdot\vartheta = \frac{6}{7}\frac{F_0}{mL}\sin\alpha t \tag{26}$$

Opšte rešenje diferencijalne jednačine (26) je dato u obliku zbira opšteg rešenja homogene jednačine i partikularnog rešenja nehomogene jednačine: $\vartheta = \vartheta_h + \vartheta_p$. Opšte rešenje homogene jednačine je

$$\vartheta_h = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t \qquad \omega = \sqrt{\frac{6}{7}\frac{k}{m}} \tag{27}$$

dok je partikularno rešenje može da se prikaže kao

$$\vartheta_p = A \sin \alpha t \tag{28}$$

Unoseći (28) u (26), dobija se

$$(-\alpha^2 + \omega^2)A = \frac{6}{7}\frac{F_0}{mL} \tag{29}$$

odakle se dobija, posle sređivanja,

$$A = \frac{6}{7}\frac{F_0}{mL} \cdot \frac{1}{(-\alpha^2 + \omega^2)} \tag{30}$$

odnosno, posle malo sređivanja,

$$A = \frac{F_0}{kL(1 - \frac{\alpha^2}{\omega^2})} \tag{31}$$

Sa ovim je opšte rešenje jednako:

$$\vartheta(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + A \cdot \sin \alpha t \tag{32}$$

Prvi izvod opšteg rešenja (32) je dat sa

$$\dot{\vartheta}(t) = -\omega C_1 \sin \omega t + \omega C_2 \cos \omega t + A\alpha \cdot \cos \alpha t \tag{33}$$

Unoeći (32) i (33) u homogene početne uslove $\vartheta(0) = 0$ i $\dot{\vartheta}(0) = 0$, dobija se:

$$\vartheta(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 \tag{34}$$

$$\dot{\vartheta}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -A \cdot \frac{\alpha}{\omega} \tag{35}$$

tako da je konačna jednačina malih oscilacija štapa data sa:

$$\vartheta(t) = A \cdot (\sin \alpha t - \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t) \tag{36}$$

gde je konstanta A data sa (31).